Processus de Galton-Watson

Théorème 1 (Galton-Watson)**.** *Soient $(X_i^j)_{i,j\in\mathbb{N}^\star}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi et m leur espérance. On définit le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$. Alors si $\mu \neq \delta_1$, on a :*

(i) Si $m \leqslant 1$, alors $\pi_\infty = 1$: Il y a extinction presque sûre du processus.

(ii) Si $m > 1$, alors $\pi_\infty < 1$: Il y a une probabilité non nulle de survie.

Démonstration.

On note G la fonction génératrice de la loi μ

Étape 1 : Montrons que G est croissante convexe sur $[0,1]$, et strictement convexe si $\mu([2,+\infty[) > 0$.

En tant que fonction génératrice, G est une série entière convergente en 1, donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $p_k = \mathbb{P}\left(X_i^j = k\right)$. Les p_k sont alors positifs, on a donc, pour $s \in [0,1]$:

$$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k\, s^{k-1} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, p_k\, s^{k-2} \geqslant 0$$

Donc G est ainsi croissante et convexe sur $[0,1]$. Si $\mu([2,+\infty[) > 0$, il existe $k \geqslant 2$ tel que $p_k > 0$, donc la deuxième inégalité est en fait stricte pour $s \neq 0$, d'où la stricte convexité.

Étape 2 : Montrons par récurrence que $G_{Z_n} = G^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$, on a, pour $s \in [0,1]$, $G_{Z_0}(s) = G_1(s) = s$, donc $G_{Z_0} = Id$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0,1]$, on a :

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=N} \prod_{i=1}^{N} s^{X_i^{n+1}}\right]$$

Par le théorème de Fubini, puis par indépendance de Z_n avec les X_i^{n+1} et des X_i^{n+1} entre eux, on obtient :

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z_n=N} \prod_{i=1}^{N} s^{X_i^{n+1}}\right] = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z_n=N}\right] \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N} s^{X_i^{n+1}}\right] = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) \prod_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[s^{X_i^{n+1}}\right]$$

On a alors :

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) \prod_{i=1}^{N} G(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = N)\, G(s)^N = (G_{Z_n} \circ G)(s)$$

Ainsi on a $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G$, et par hypothèse de récurrence on a donc $G_{Z_{n+1}} = G^n$

Étape 3 : Montrons que π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.

Si $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, on a $\pi_\infty = \lim_{n\to+\infty} \pi_n$ puisque $(Z_n = 0)$ est une suite croissante d'évènements. De plus :

$$\pi_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = G_{Z_{n+1}}(0) = G(G_{Z_n}(0)) = G(\mathbb{P}(Z_n = 0)) = G(\pi_n)$$

Comme G est continue sur $[0,1]$, on obtient que $G(\pi_\infty) = \pi_\infty$ par passage à la limite. De plus, si $u \in [0,1]$ est le plus petit point fixe de G, alors $[0,u]$ est stable par G, car G est croissante. Comme $\pi_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0 \in [0,u]$, on a $\pi_n \in [0,u]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors π_∞ est un point fixe de G dans $[0,u]$, donc $\pi_\infty = u$ est le plus petit point fixe de G.

Étape 4 : Conclusion.

Comme $G(1) = 1$ et $G'(1) = m$, la tangente à la courbe représentative de G en 1 a pour équation $y = m(x-1)+1$. On distingue alors plusieurs cas :

(i) Si $m > 1$, alors il existe $\eta < 1$ tel que $G(s) < s$ pour $s \in]\eta, 1[$. Comme $G(0) \geqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un point fixe de G sur $[0, \eta]$. Donc $\pi_\infty < 1$.

(ii) Si $m < 1$, alors, comme G est convexe, sa courbe représentative reste au-dessus de sa tangente, donc strictement au-dessus de la droite d'équation $y = x$, ce qui implique que 1 est le seul point fixe de G sur $[0, 1]$, donc $\pi_\infty = 1$.

(iii) Si $m = 1$, alors, comme $\mu \neq \delta_1$, il existe $k \geqslant 2$ tel que $p_k > 0$. Donc G est strictement croissante, donc reste strictement au-dessus de sa tangente d'équation $y = x$, ce qui implique que 1 est le seul point fixe de G sur $[0, 1]$, donc $\pi_\infty = 1$.

$\square$

Références

[App13] W. Appel. *Probabilités pour les non probabilistes.* H&K